

Déplacement à temps minimal de particules passives sous l'action d'un point vortex

Boris WEMBE, Boris.Wembe@irit.fr (Doctorant)

18 mai 2019

Encadrants : O. Cots & J. Gergaud
SMAI 2019, 9^e biennale, Guidel.



Définition et contexte de l'étude

- ▶ On considère N *points vortex* (ou vortex), solutions des équations d'Euler incompressibles dans le cas limite où la viscosité du fluide se concentre en un nombre fini de points.

Dynamique des vortex :

$$\frac{dx_\alpha(t)}{dt} = - \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{k_\beta}{2\pi} \frac{y_\alpha(t) - y_\beta(t)}{r_{\alpha\beta}^2(t)}, \quad \frac{dy_\alpha(t)}{dt} = \sum_{\substack{\beta=1 \\ \beta \neq \alpha}}^N \frac{k_\beta}{2\pi} \frac{x_\alpha(t) - x_\beta(t)}{r_{\alpha\beta}^2(t)}$$

Remarque : L'étude est faite en dimension 2, pour plus de détails voir [1, 2].

- ▶ Objectif ([3]) : utiliser au mieux la *circulation* des vortex pour déplacer une particule (ou plutôt un flux de particules) entre deux positions données.

Problème de contrôle optimal

On s'intéresse au cas $N=2$ avec $k_1 = 0$ (particule) et $k_2 \neq 0$ (vortex immobile placé en l'origine du repère) ; le problème de contrôle optimal (déplacement d'une particule en temps minimal) s'écrit

$$(P) \quad \begin{cases} \min_{t_f, u} t_f \\ \dot{x}(t) = F_0(x(t)) + \sum_{i=1}^2 u_i(t) F_i(x(t)), \quad x(0) = x_0, \quad \|u(t)\| \leq 1 \\ x(t_f) = x_f \end{cases}$$

avec $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ la position de la particule en l'instant t , x_0 la position initiale, x_f la position cible et avec

$$F_0(x) = \frac{\mu}{r^2} \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad F_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad F_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_2},$$

où $\mu = \frac{k}{2\pi}$ et $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

Contrôlabilité et existence de solutions optimales

Contrôlabilité

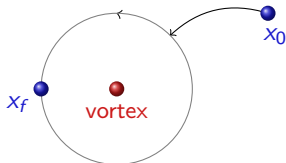
Découle du théorème de Chow : la dérive F_0 est une rotation (se voit bien en coordonnées polaires, cf. eq. ci-dessous avec $v = 0$) donc un champ récurrent.

Dynamique contrôlée en coordonnées polaires :

$$\dot{r}(t) = v_1(t), \quad \dot{\theta}(t) = \frac{\mu}{r(t)^2} + \frac{v_2(t)}{r(t)},$$

où le nouveau contrôle v est donné par $v = ue^{-i\theta}$.

Exemple ($\mu > 0$) :



Existence de solutions optimales

Théorème : Pour tout x_0, x_f dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\mu \in \mathbb{R}$, le problème (P) admet une solution.

La preuve repose essentiellement sur le théorème de Filippov.

Hypothèse non triviale : la compacité de l'espace d'états n'est pas automatique à cause de la singularité en l'origine (au point vortex).

Remarque : dans le cas $\mu = 0$, tout est trivial puisque l'on travaille avec la métrique euclidienne dans le plan et la singularité a disparu.

Référence : *O. Cots, J. Gergaud & B. Wembe, About the minimal time control of passive tracers in presence of a single point vortex, (2019) submitted.*

Idée de la preuve

Dans un premier temps, on ajoute la contrainte sur l'état $\forall t : r(t) \geq \varepsilon$, pour un $\varepsilon > 0$ donné. Dans ce cas, le théorème de Filippov s'applique (on a aussi $r(t) \leq K$ puisque $\|v\| \leq 1$ et $\dot{r}(t) = v_1(t)$).

On cherche ensuite un $\varepsilon > 0$ pour lequel les deux problèmes sont équivalents. Ce qui se fait en deux étapes :

- ▶ **Étape 1 : Il existe un cercle $\mathcal{C}(0, R)$ centré en 0 de rayon $R > 0$, tel que le temps minimal de parcours de la circonférence est strictement plus petit que celui qu'il faudrait pour rejoindre le centre en partant de n'importe quel point du cercle.**

Dit autrement, à la distance R , il est strictement plus rapide de faire le tour du vortex que de le rejoindre.

- ▶ **Étape 2 : Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute trajectoire qui intersecte le cercle $\mathcal{C}(0, \varepsilon)$, il existe une trajectoire admissible qui soit strictement meilleure que cette dernière et qui soit extérieure au cercle $\mathcal{C}(0, \varepsilon)$.**

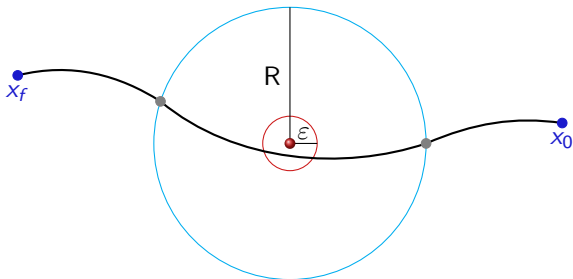


Figure: Illustration d'une trajectoire admissible strictement meilleure qu'une autre qui passe par la boule de rayon ε .

- ▶ **Étape 2 : Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute trajectoire qui intersecte le cercle $\mathcal{C}(0, \varepsilon)$, il existe une trajectoire admissible qui soit strictement meilleure que cette dernière et qui soit extérieure au cercle $\mathcal{C}(0, \varepsilon)$.**

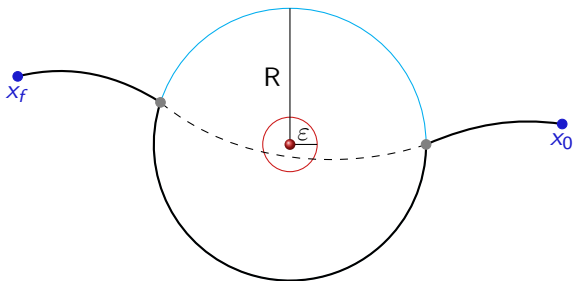


Figure: Illustration d'une trajectoire admissible strictement meilleure qu'une autre qui passe par la boule de rayon ε .

Conditions nécessaires d'optimalité

Principe du maximum de Pontryagin (PMP)

Si (t_f, u) est une solution de (P), avec x la trajectoire associée, alors il existe une fonction absolument continue $p(\cdot)$ et un réel négatif p^0 telles que

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t)), \quad \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t)), \quad (1)$$

où l'on a défini le *pseudo-hamiltonien*

$$\begin{aligned} H(x, p, u) &= p \cdot F_0(x) + u_1 p \cdot F_1(x) + u_2 p \cdot F_2(x) \\ &= H_0(x, p) + u_1 p_1 + u_2 p_2 \end{aligned}$$

tel que, pour presque tout $t \in [0, t_f]$, est vérifié :

$$H(x(t), p(t), u(t)) = \max_{\|v\| \leq 1} H(x(t), p(t), v) = -p^0$$

et tel que le couple $(p(\cdot), p^0)$ ne s'annule jamais.

Structure des extrémales

Définition : Le quadruplet (u, x, p, p^0) est appelé une *extrémale*; celle-ci est dite *normale* si $p^0 \neq 0$ et *anormale* si $p^0 = 0$.

Contrôle optimal : Puisque $u(t)$ maximise

$$v \mapsto H(x(t), p(t), v) = H_0(x(t), p(t)) + v_1 p_1(t) + v_2 p_2(t),$$

sous la contrainte $\|v\| \leq 1$, alors :

$$u(t) = u(p(t)) = \frac{(p_1(t), p_2(t))}{\|(p_1(t), p_2(t))\|} \quad (2)$$

hors de la *surface de commutation* $\Sigma = \{(x, p) \mid p = 0\}$.

Proposition : Aucune extrémale ne rencontre la surface de commutation Σ , le contrôle optimal est donc lisse et donné par (2).

Fonction exponentielle

Le *hamiltonien vrai* (noté encore H) est défini par

$$H(x, p) = H(x, p, u(p)) = \frac{\mu}{r^2}(x_1 p_1 - x_2 p_2) + (p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

et le système hamiltonien (1) se réécrit :

$$\dot{z}(t) = \vec{H}(z(t)),$$

où on a introduit

$$z = (x, p) \quad \text{et} \quad \vec{H}(z) = \left(\frac{\partial H}{\partial p}(z), -\frac{\partial H}{\partial x}(z) \right).$$

On note $\exp(t\vec{H})(z_0)$ le flot hamiltonien, *i.e* la solution au temps t du système hamiltonien avec z_0 comme condition initiale et on définit l'*application exponentielle* par

$$\exp_{x_0}(t, p_0) = \pi_x \circ \exp(t\vec{H})(x_0, p_0),$$

où π_x est la projection canonique sur l'espace d'états.

Fonction de tir

Puisque $p(0) = p_0 \neq 0$ (car on ne rencontre pas la surface de commutation), par homogénéité en $(p(\cdot), p^0)$, on peut fixer $\|p_0\| = 1$ et laisser libre le paramètre p^0 .

On définit alors la *fonction de tir* :

$$S : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(t_f, p_0) \longmapsto S(t_f, p_0) = \exp_{x_0}(t_f, p_0) - x_f$$

où \mathbb{S}^1 est le cercle unité.

Il suffit de résoudre $S(t_f, p_0) = 0$ pour déterminer une extrémale solution du PMP.

Remarque : cette paramétrisation nous permet de calculer des extrémales normales mais aussi anormales.

Dérive faible, dérive forte

Rappel :

$$F_0(x, \mu) = \frac{\mu}{r^2} \left(-x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad F_1(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \quad \text{et} \quad F_2(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

On introduit l'ensemble des *directions possibles* :

$$\mathcal{F}(x, \mu) = \left\{ F_0(x, \mu) + \sum_{i=1}^2 u_i F_i(x) \mid u = (u_1, u_2) \text{ t.q. } \|u\| \leq 1 \right\}.$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} 0 \in \mathcal{F}(x, \mu) &\Leftrightarrow \exists u = (u_1, u_2) \text{ t.q. } \|u\| \leq 1 \text{ et } F_0(x, \mu) = \sum_{i=1}^2 u_i F_i(x) = u \\ &\Leftrightarrow \|F_0(x, \mu)\| \leq 1 \Leftrightarrow |\mu| \leq r. \end{aligned}$$

On dira alors que :

- la dérive est **faible** (*weak drift*) si $\|F_0(x, \mu)\| < 1$,
- la dérive est **forte** (*strong drift*) si $\|F_0(x, \mu)\| > 1$,
- la dérive est **modérée** (*moderate drift*) si $\|F_0(x, \mu)\| = 1$.

Dérive faible, dérive forte

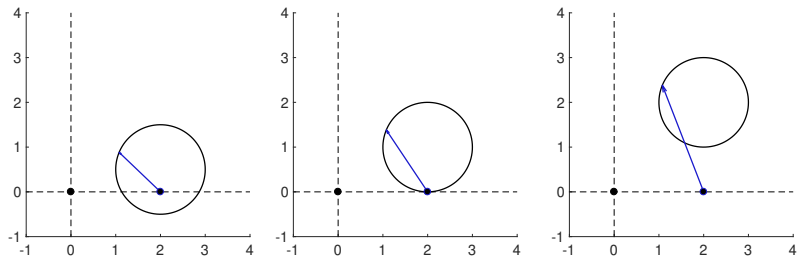


Figure: Dérive faible ($\mu = 0.5r_0$), modérée ($\mu = r_0$) et forte ($\mu = 2r_0$) de gauche à droite, avec $x_0 = (2, 0)$. Le **cercle** correspond à $x_0 + \mathcal{F}(x_0, \mu)$ et le **vecteur bleu** à une direction initiale **temps minimisante** t.q. $p_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, avec $\alpha = 7\pi/8$.

Dérive faible, dérive forte

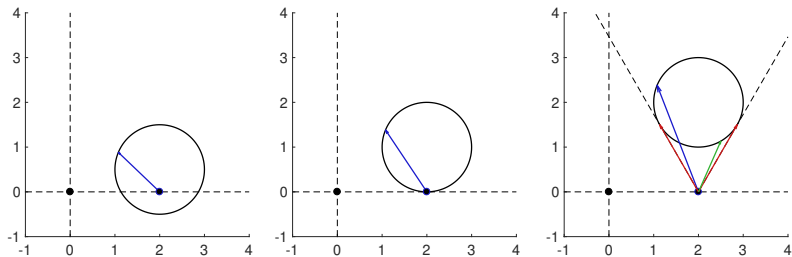


Figure: Dérive faible ($\mu = 0.5r_0$), modérée ($\mu = r_0$) et forte ($\mu = 2r_0$) de gauche à droite, avec $x_0 = (2, 0)$. Le **cercle** correspond à $x_0 + \mathcal{F}(x_0, \mu)$ et le **vecteur bleu** à une direction initiale **temps minimisante** t.q. $p_0 = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, avec $\alpha = 7\pi/8$. Les **directions rouges** correspondent aux **anormales** et le **vecteur vert** à une direction **temps maximisante**.

Proposition : Dans le cas d'une dérive faible, il n'y a pas d'anormales. Il y a en exactement deux dans le cas d'une dérive forte et une seule dans le cas d'une dérive modérée.

Applications

On fixe $x_0 = (2, 0)$ (le rayon initial est $r_0 = 2$), $x_f = (-2, 0)$ et on résout $S(t_f, p_0) = 0$ pour deux valeurs de μ :

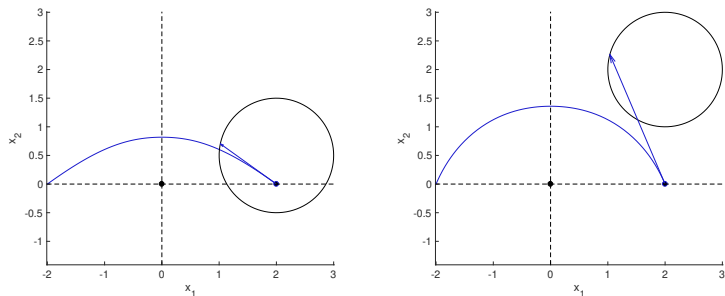


Figure: Projection d'extrémales solution du PMP dans l'espace d'états.
(Gauche) La dérive est faible ($\mu = 0.5r_0$) et le temps de transfert est $t_f \approx 2.83$.
(Droite) La dérive est forte ($\mu = 2r_0$) et le temps de transfert est $t_f \approx 1.64$.

Remarque : On utilise `HamPath` [4] pour les simulations numériques.

Applications

Dans ce second exemple on veut mettre en évidence l'importance de la circulation du vortex.

On fixe $x_0 = (2, 0)$ (le rayon initial est $r_0 = 2$), $x_f = (2.5, 0)$ et on résout $S(t_f, p_0) = 0$ pour deux valeurs de μ :

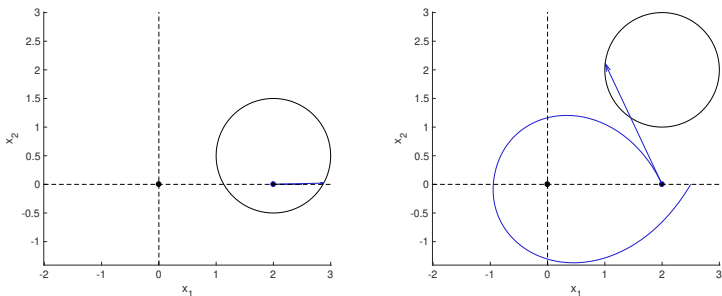


Figure: Projection d'extrémales solution du PMP dans l'espace d'états.
(Gauche) La dérive est faible ($\mu = 0.5r_0$) et le temps de transfert est $t_f \approx 0.56$.
(Droite) La dérive est forte ($\mu = 2r_0$) et le temps de transfert est $t_f \approx 2.82$.

Points conjugués

Rappel : un temps t_c est dit *conjugué* le long d'une trajectoire $x(\cdot, p_0)$ si $S'(t_c, p_0)$ n'est pas inversible, $x(t_c, p_0)$ est appelé *point conjugué*.

Point conjugué \Leftrightarrow Perte d'optimalité locale.

Calcul d'un temps conjugué : on appelle *champ de Jacobi*, noté $\delta z = (\delta x, \delta p)$, une solution de l'équation de Jacobi :

$$j(t) = \vec{H}'(z(t)) J(t), \quad J(0) = (0, v),$$

avec v vérifiant $p_0 \cdot v = 0$. Un temps t_c est conjugué ssi il est solution de l'équation [5] :

$$t \mapsto \det(\delta x(t), \dot{x}(t)) = 0.$$

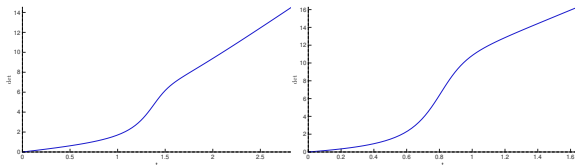


Figure: Graphe de $t \mapsto \det(\delta x(t), \dot{x}(t))$ sur $[0, t_f]$ pour le cas des 2 premiers exemples. Le graphe nous montre qu'il n'y a pas de point conjugué.

Conclusion et perspectives

Conclusion : Pour résumer, nous avons montré ici la contrôlabilité du problème initial ainsi que l'existence de solutions optimales pour tout x_0 , x_f donnés. De plus nous avons déterminé des solutions satisfaisants les conditions nécessaires d'optimalités données par le PMP et vérifié les conditions d'ordre 2 (absence de points conjugués).

Référence : *O. Cots, J. Gergaud & B. Wembe, About the minimal time control of passive tracers in presence of a single point vortex, (2019) submitted.*

Perspectives : La prochaine étape consisterait à construire la synthèse optimale aussi bien pour le cas d'une dérive faible que forte. Après quoi, on pourrait regarder le cas $N = 3$ par exemple ou encore le problème de minimisation de l'énergie.

Références

- [1] P. K. Newton, *The N-vortex problem : Analytical techniques*, New York : Springer, (2001).
- [2] P. G. Saffman, *Vortex dynamics*, Cambridge : Cambridge University Press (1992).
- [3] B. Protas, *Vortex dynamics models in flow control problems IOP Science*, Nonlinearity vol **21** 2008.
- [4] J.-B. Caillaud, O. Cots & J. Gergaud, Differential continuation for regular optimal control problems, *Optim. Methods Softw.*, 27, no 2, (2012).
- [5] Bonnard, B. ; Caillaud, J.-B. ; Trélat, E. *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, ESAIM Control Optim. and Calc. Var., 13 (2007), no. 2, 207–236.
- [6] O. Cots, J. Gergaud & B. Wembe, About the minimal time control of passive tracers in presence of a single point vortex, (2019) submitted.