

# Problème de contrôle optimal en temps minimal pour un avion contraint en phase de montée

D.Goubinat,  
en collaboration avec O.Cots, J.Gergaud

Journées SMAI-MODE 2016

23-25 mars, Toulouse

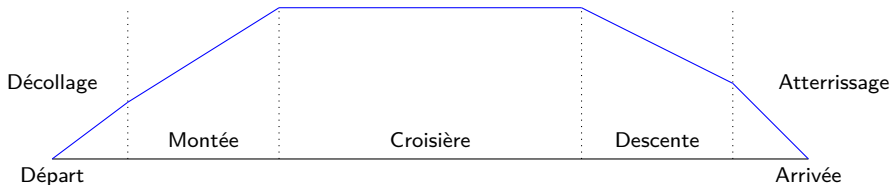


THALES

# Sommaire

- 1 Contexte
  - Position du problème
  - Dynamique
  - Un problème de Mayer
- 2 Étude géométrique
  - Principe du maximum
  - Extrémales non contraintes
  - Extrémales contraintes
- 3 Résultats numériques
  - Résumé
  - Simulation
- 4 Conclusion et Travail Futur

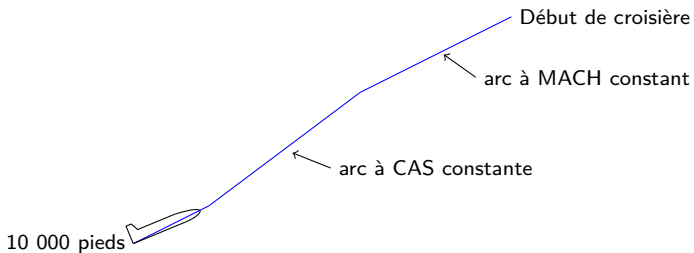
Une trajectoire d'avion se compose de plusieurs phases de vols contraintes



Les contraintes sont imposées par :

- le contrôle aérien,
- l'enveloppe de vol,
- les procédures de vol.

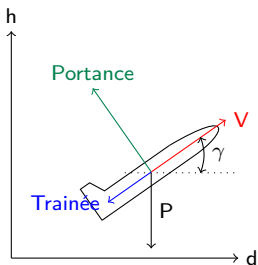
On s'intéresse exclusivement à la phase de montée pour un avion de type moyen-courrier, où les procédures actuelles sont de la forme :



Les contraintes à prendre en compte sur cette phase sont :

- vitesse maximale (CAS et MACH)
- pente minimale et maximale
- taux de montée (non considéré ici)

Dynamique d'un avion :



$$\frac{dh}{dt} = V \sin(\gamma)$$

$$\frac{dd}{dt} = V \cos(\gamma)$$

$$m \frac{dV}{dt} = \varepsilon T_{max}(h) - \overbrace{\frac{1}{2} \rho(h) S V^2 C_D(C_L)}^{\text{Trainée}} - mg \sin(\gamma)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\varepsilon C_s(V) T_{max}(h)$$

$$mV \frac{d\gamma}{dt} = \underbrace{\frac{1}{2} \rho(h) S V^2 C_L}_{\text{Portance}} - mg \cos(\gamma)$$

$h$  : altitude

$d$  : distance longitudinal

$V$  : vitesse air

$m$  : masse

$\gamma$  : pente air

$C_s$  : débit de carburant

$T_{max}$  : poussée maximale

$\rho$  : masse volumique de l'air

$C_L, C_D$  : coefficients aérodynamiques

$\varepsilon$  : rapport de poussée

$S$  : surface alaire

$g$  : constante gravitationnelle

Modèle atmosphérique :

Modèle ISA (*International Standard Atmosphere*)

$$\begin{cases} T = T_0 - \beta h \\ P = P_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{\frac{g}{\beta R}} \rightarrow \rho = \frac{P}{RT}, R : \text{constante spécifique de l'air.} \end{cases}$$

Modèle de performance avion :

$$\text{Modèle BADA} \left\{ \begin{array}{l} T_{\max} = C_{T1} \left( 1 - \frac{h}{C_{T2}} + C_{T3} h^2 \right) : \text{poussée maximale} \\ C_s = C_{s1} \left( 1 + \frac{V}{C_{s2}} \right) : \text{débit carburant} \\ C_D = C_{D1} + C_{D2} \cdot C_L^2 : \text{coefficient de traînée} \end{array} \right.$$

Écriture sous forme d'un problème de contrôle optimal :

- état :  $x = (h, d, v, m, \gamma)$ ,
- contrôle :  $u = (\varepsilon, C_L)$ ,
- paramètres :  $\omega = (S, g, C_{T_1}, C_{T_2}, C_{T_3}, C_{D_1}, C_{D_2}, C_{s_1}, C_{s_2}, R, T_0, \beta, P_0)$ ,
- fonctions auxiliaires :  $\theta(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \theta_4(x))$ .

h est l'altitude

d est la distance longitudinale

V est la vitesse air

$\gamma$  est la pente air

m est la masse

$\varepsilon$  est le rapport de poussée

$C_L$  est le coefficient de portance

On obtient alors la dynamique suivante :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) = f_0(x) + u_1 f_1(x) + u_2 f_2(x) + u_2^2 f_3(x)$$

Avec

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0 = \left( x_3 \sin(x_5), x_3 \cos(x_5), -\omega_6 \theta_3(x) - \omega_2 \sin(x_5), 0, -\frac{\omega_2}{x_3} \cos(x_5) \right)^T \\ f_1 = \left( 0, 0, \frac{\theta_1(x)}{x_4}, -\theta_1(x)\theta_2(x), 0 \right)^T \\ f_2 = \left( 0, 0, 0, 0, \frac{\theta_3(x)}{x_3} \right)^T \\ f_3 = (0, 0, -\omega_7 \theta_3(x), 0, 0)^T \end{array} \right.$$

Dans cette présentation, on se limitera à l'étude de la contrainte de pente  $c_1(x) = x_{5,\min} - x_5 \leq 0$ .



Ceci nous amène à résoudre le problème de contrôle optimal (OCP) écrit sous forme de Mayer et défini par :

$$\begin{array}{l}
 \min_{(t_f, u)} t_f \\
 \frac{dx}{dt}(t) = f(x(t), u(t)), \quad t \in [0, t_f] \text{ p.p.} \\
 u(t) \in \mathcal{U} = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_i \in [u_{i,\min}, u_{i,\max}], i = 1, 2\} \\
 x(t) \in \mathcal{X} = \mathbb{R}^5 \\
 c(x(t)) \leq 0, \quad t \in [0, t_f] \\
 x(0) = x_0, \quad x_f \in \mathcal{X}_f = \{x(t_f) \in \mathcal{X}, b_f(x(t_f)) = 0\} \subset \mathcal{X}
 \end{array}$$

$$\text{Avec } b_f(x) = \begin{pmatrix} x_{1_f} - x_1(t_f) \\ x_{2_f} - x_2(t_f) \\ x_{3_f} - x_3(t_f) \\ x_{5_f} - x_5(t_f) \end{pmatrix}, \text{ et } c(x) = x_{5,\min} - x_5$$

Hamiltonien :  $H(x(t), p(t), u(t), \eta(t)) = \langle p(t), f(x(t), u(t)) \rangle + \langle \eta(t), c(x(t)) \rangle$

### Conditions Nécessaires :

Si le triplet  $(t_f^*, x^*, u^*)$  est optimal alors il existe  $p^* \in \text{VB}([0, t_f], (\mathbb{R}^n)^*)$  et  $p^0 \leq 0$ ,  $(p^*, p^0) \neq (0, 0)$  tel que p.p :

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t))$$

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t))$$

$$H(x^*(t), p^*(t), u^*(t), \eta^*(t)) = \max_{u \in \mathcal{U}} H(x^*(t), p^*(t), u, \eta^*(t))$$

On complète ces équations avec les conditions

-de transversalité :  $p_4^*(t_f) = 0$ ,  $H(x^*(t_f), p^*(t_f), u^*(t_f), \eta^*(t)) = -p^0$

-de complémentarité :  $\forall t \in [0, t_f]$ ,  $\eta^*(t)c(x^*(t)) = 0$  et  $\eta^*(t) \leq 0$

-de jonctions :  $H[\tau^+] = H[\tau^-]$ ,  $p^*(\tau^+) = p^*(\tau^-) - \nu_\tau c'(x^*(\tau))$ ,  $\nu_\tau \leq 0$

### Remarque

- $\tau$  est soit un temps de contact soit un temps de jonction avec la contrainte,  $c(x(\tau)) = 0$ .
- On appelle extrémale le quadruplet  $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot), \eta(\cdot))$  qui satisfait les conditions nécessaires excepté les conditions de transversalité.

Pour  $H_3(z) \neq 0$ , on définit  $\bar{u}_2(z) := -H_2(z)/2H_3(z)$  t.q.  $\partial_{u_2} H(z, \bar{u}_2(z)) = 0$  avec  $z := (x, p)$ .

Considérons une extrémale sans contraintes actives ( $c(x) < 0$ )

– le contrôle  $u = (u_1, u_2)$  est défini par

$$u_1 = u_{1,\max} \text{ si } H_1 > 0, \text{ ou } u_{1,\min} \text{ si } H_1 < 0 \text{ (on suppose qu'il n'y a pas d'arc singulier),}$$

$$u_2 = \begin{cases} \begin{cases} \bar{u}_2(z), & \text{si } \bar{u}_2(z) \in [u_{2,\min}, u_{2,\max}] \\ u_{2,\max}, & \text{si } \bar{u}_2(z) \geq u_{2,\max} \\ u_{2,\min}, & \text{si } \bar{u}_2(z) \leq u_{2,\min} \end{cases} & \text{si } H_3(z) < 0, \\ \begin{cases} u_{2,\max}, & \text{si } H_2(z) > 0 \\ u_{2,\min}, & \text{si } H_2(z) < 0 \\ u_2 \in [u_{2,\min}, u_{2,\max}], & \text{si } H_2(z) = 0 \end{cases} & \text{si } H_3(z) = 0, \end{cases},$$

–  $\eta(\cdot) \equiv 0$ ,

– On déduit alors  $x(\cdot)$  et  $p(\cdot)$  des conditions nécessaires par intégration.

### Remarque

–  $H_i = \langle p, f_i \rangle$  est le relèvement Hamiltonien du champs  $f_i$

**Definition** On définit l'ordre  $m$  de la contrainte  $c$  comme le premier entier tel que

$$\frac{\partial c}{\partial u} = \frac{\partial \dot{c}}{\partial u} = \dots = \frac{\partial c^{(m-1)}}{\partial u} = 0 \text{ et } \frac{\partial c^{(m)}}{\partial u} \neq 0_{\mathbb{R}^2}.$$

Considérons la contrainte active et d'ordre 1, i.e  $c_1 = \dot{c}_1 = 0$ ,  $\frac{\partial c_1}{\partial u} = 0$  et  $\frac{\partial \dot{c}_1}{\partial u} = (0, \frac{\theta_3}{x_3}) \neq 0$ .

De ces informations, on déduit le quadruplet relatif à cette extrémale :

- le contrôle contraint  $u = (u_1, u_2)$  est donné par

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{1,\max} \text{ si } H_1 > 0, \text{ ou } u_{1,\min} \text{ si } H_1 < 0 \text{ (on suppose qu'il n'y a pas d'arc singulier),} \\ u_2 &= \frac{\omega_2}{\theta_3} \cos(x_{5,\min}), \end{aligned}$$

-  $u_2 \in ]u_{2,\min}, u_{2,\max}[ \implies \varphi_2 = 0, \dot{\varphi}_2 = 0 = \{H, \varphi_2\} = \{\tilde{H}, H_2\} + 2u_2\{\tilde{H}, H_3\} - \eta \frac{\partial \dot{c}_1}{\partial u_2} + 2H_3 u_2' f,$

- le saut  $\nu$  est nul,

- Comme précédemment,  $x(\cdot)$  et  $p(\cdot)$  sont déduits des conditions nécessaires par intégration.

**Remarque**

-  $\{H, H_i\} = \langle p, [f, f_i] \rangle$  représente le crochet de Poisson, où  $[f, f_i]$  est le crochet de Lie entre  $f$  et  $f_i$ .

-  $\varphi_2(z) := \partial_{u_2} H(z), \tilde{H} := \langle p, f \rangle$

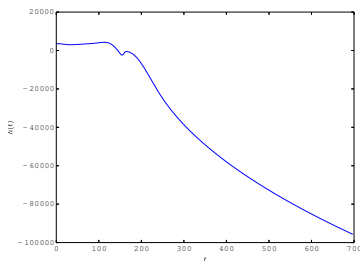
## Difficultés rencontrées

- Problème non contraint : stabilité numérique
- Problème contraint : stabilité numérique, changement de structure

## Approche

On utilise les méthodes directes de façon à initialiser la méthode de tir multiple

- méthodes directes :
  - *Bocop*<sup>1</sup>
  - grand rayon de convergence  $\implies$  initialisation du tir multiple plus précise
- méthodes indirectes :
  - *Hampath*<sup>2</sup>
  - grande précision



---

1. <http://bocop.org>  
2. <http://hampath.org>

## Méthodes Directes

On utilise le logiciel *Bocop*, il discrétise un problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie qui est résolu par le solveur IPOPT.

## Données

$$u_{1,\min} = 0.3, \quad u_{1,\max} = 1, \quad u_{2,\min} = 0, \quad u_{2,\max} = 1.6$$

$$x_0 = (3480, 0, 145, 72\ 000, 0.25)^T$$

$$x_f = (9144, 150\ 000, 191.0, \text{libre}, 0)^T$$

## Initialisation

Les variables d'états sont initialisées suivants leur comportement global connus

Intégrateurs implicite d'Euler (ordre 1) et de Gauss (ordre 4) de 500 à 1000 points de discrétisation

## Méthodes Indirectes

Le principe du maximum permet d'écrire un problème de contrôle optimal en un problème de tir multiple résolu par le logiciel *Hampath*.

### Tir multiple

$$(t_0, z_0) \xrightarrow{c < 0} (t_1, z_1) \xrightarrow{c = 0} (t_2, z_2) \xrightarrow{c < 0} (t_3, z_3) \xrightarrow{c < 0} \dots \xrightarrow{c < 0} (t_f, z_f)$$

$$z_0 = (x_0, p_0) \quad c(x_1) = 0 \quad z(t_2, t_1, z_1) = z_2 \quad z(t_3, t_2, z_2) = z_3 \quad b_f(x(t_f, t_{i-1}, z_{i-1})) = 0$$

$$u_{2,nc}(z_1) = u_{2,c}(x_1) \quad p_4(t_f, t_{i-1}, z_{i-1}) = 0$$

$$z(t_1, t_0, z_0) = z_1 \quad H(z(t_f, t_{i-1}, z_{i-1})) = 1$$

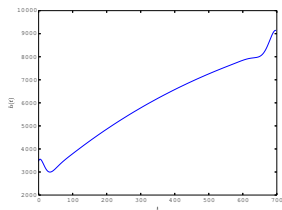
Tir multiple de structure

Tir multiple de stabilité

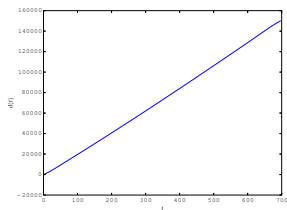
On cherche alors un zéro de  $S(X)$ , avec  $X = (p_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_f, z_1, z_2, \dots, z_{i-1})$  à l'aide d'une méthode de type Newton.

- Le tir multiple est initialisé grâce aux données issues des méthodes directes

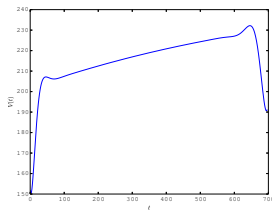
Problème non contraint :



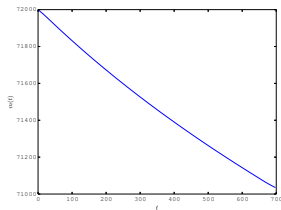
*h*



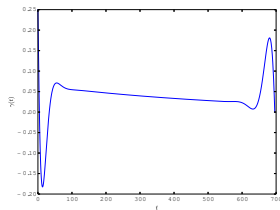
*d*



*V*



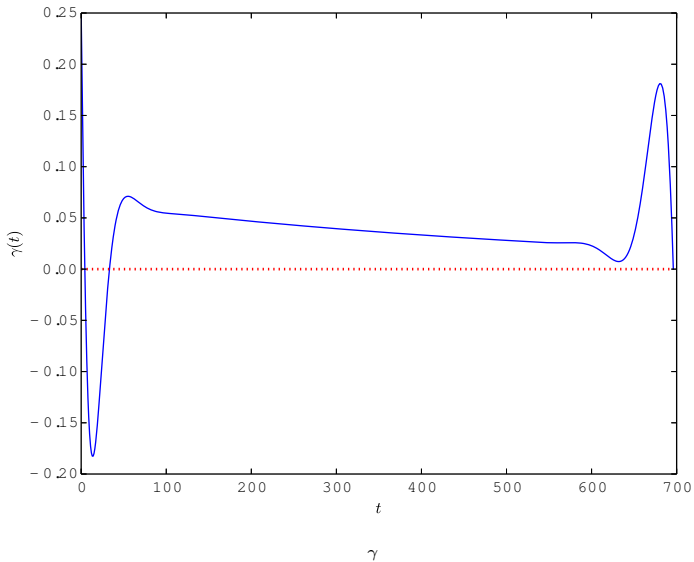
*m*



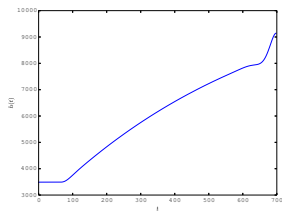
*γ*



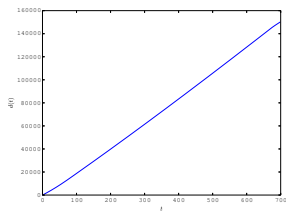
## Problème non contraint :



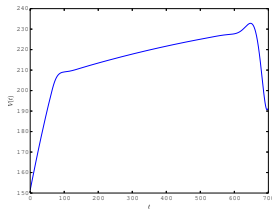
Problème contraint :



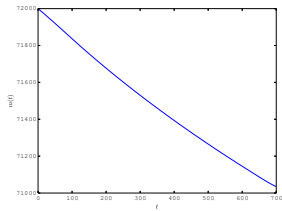
$h$



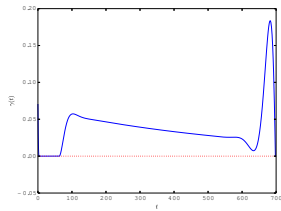
$d$



$V$



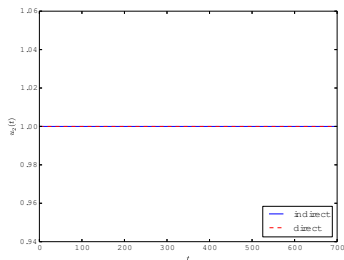
$m$



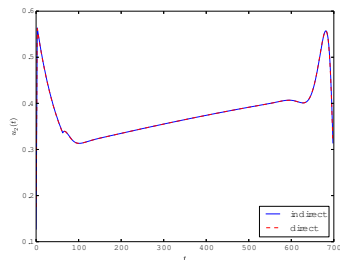
$\gamma$

## Problème contraint : Comparaison des résultats de Bocop et Hampath

Profil de commande :



$u_1$  : rapport de poussée

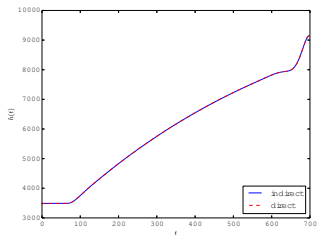


$u_2$  : coefficient de portance

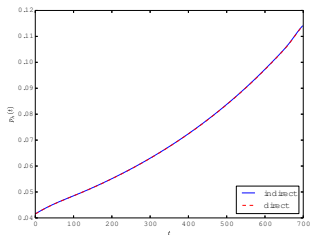
Temps de montée :

- $t_f = 696$  s sous Bocop
- $t_f = 698$  s sous Hampath

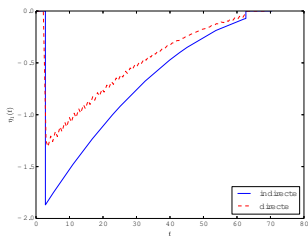
## Problème contraint : Comparaison des résultats de Bocop et Hampath



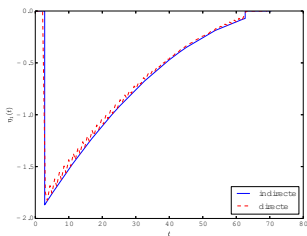
$h$  : altitude



$p_h$  : etat adjoint de  $h$

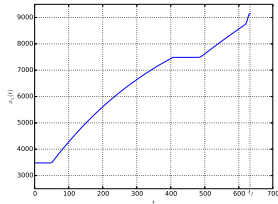


$\eta_1$  : données brutes

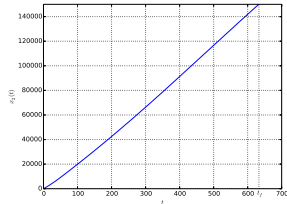


$\eta_1$  : données post-traitées

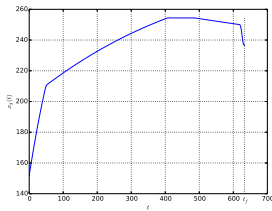
Problème contraint :  
 Trajectoire ressemblant à une montée de type CAS/MACH obtenue avec Bocop



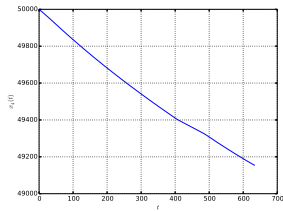
$h$



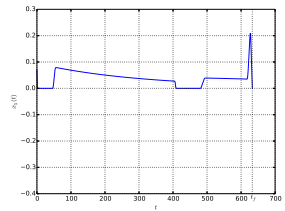
$d$



$v$



$m$



$\gamma$

## Conclusion

- Détermination d'un type de trajectoire à temps minimal avec une contrainte de pente
- Relation entre les méthodes directes et indirectes de façon à initialiser du tir multiple

## Travail Futur

- Intégration numérique des arcs comportant des contraintes de vitesses
- Étude de problème de consommation minimale
- Étude des trajectoires de montée en changeant le type d'avion
- Comparaison des trajectoires optimales trouvées avec les procédures actuelles